東ドイツの数学教科書紹介 (4)

海外教育事情視察報告　その5

能　崎　克　己

前3号にひきつづき，東ドイツ上級中等学校の数学の教科書の概要を紹介する。

前号では，第12学年教科書の内容のうち，次の部分について紹介した。

A章　ベクトル計算と解析幾何

B章　円錐曲線

本号においては，これにつづいて，同書の残りの部分である

C章　有理関数以外の関数

D章　微分積分法とその応用

の2つの章の内容を，概略紹介する。

内容の紹介については，原則として，前3号と同様の基準による。本号に紹介する部分の記述は，著者の分担の関係であろうか，第11学年教科書のA，B，Cの各章の記述と，形式上よく類似しており，したがって，紹介のしかたも，その部分とほぼ同様である。

紹介にあたっては，なるべく原書の意図を損なうことなく，また，なるべく要点をとらえて紹介するように，つとめたつもりであるが，誤訳，その他の誤りがあるのではないかと懸念している。この点については，ご諒承を願いたい。

なお，第11学年教科書と同様に，第12学年教科書においても，巻末には，問題が多数収録され，この部分に46ページを費し，教科書の総ページ数 221 のうち，約$\frac{1}{5}$を占めている。問題は第11学年教科書と同じく，練習問題と補充問題の2種類から成り，本文のA，B，C，Dの各章に対応して，a，b，c，dの各章としてあげられており，形式も同様である。問題を全部あげることは不可能であり，また，その必要性もないと思われるので，一応，参考として，補充問題を28題だけそのまま紹介し，それ以外は，各学習単位別，もしくは，各章別の問題数を記するのみに止めておいた。

本号をもって，5号にわたった，東ドイツ上級中等学校の数学科指導計画およびその教科書の概略の紹介はすべて完了した。長期にわたったため，あるいは，東ドイツにおいても，すでにこの計画は，一部改正されているかもしれない。この意味では，このシリーズは，現状を紹介したことにはならないかもしれないが，この点は，お許しをいただくほかはない。

この拙いシリーズが，何かのお役に立てば，著者のこの上ない幸せである。

数　学　第12学年教科書（つづき）

C章　有理関数以外の関数

有理関数以外の関数の若干の性質

1. 有理関数と，それ以外の関数

▷1 定義　関数 f が，定義域 $\mathrm{Db}(f)=\mathrm{X}$ をもち，この関数 f が X の上の有理関数であるとは，自然数 n および m，ならびに，実数 a_0，a_1，……，a_n；b_0，b_1，……，b_m（ただし $a_n \neq 0$ および $b_m \neq 0$）が存在し，すべての $x \in \mathrm{X}$ に対して，

$$(*)\quad f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots\cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu}$$

が成り立つことである。

f に対する表わし方(＊)において，$m=0$ ならば，f を X の上の有理整関数，その他の場合には，X の上の有理分数関数という。

X が区間を含むならば，この表示(＊)は，X の上の有理整関数に対して一意的であり，さらに，$b_0=1$ であるようにしたとき，この表示を，f の標準化表示という。X の上の有理分数関数に対しても，X が区間を含む場合には，一意的に定められた標準化表示が存在する。

$y=\sqrt{x+5}$, $y=\sin x$, $y=3^x$ などの関数は，その定義域が区間を含む場合には，(＊)のような表示はできないので，これらは，X の上の，有理関数以外の関数である。

定義域が離散的な値，特に，有限個の値から成るときには，もはや，この一意性はあり得ない。

1　方程式　$y=x-1$　および定義域が $\{1, 2, 3\}$ である関数は，値の組 [1，0]，[2，1]，[3，2] より成る。しかし，同じ値の組は，方程式　$y=(x-2)^3+1=x^3-6x^2+12x-7$ や，$y=(x-2)^5+1$，さらに無限に多くの他の方程式によっても与えられる。

① 次の関数が，それぞれ示されている定義域の上での有理関数であるかどうかをしらべよ。また，場合によっては，その標準化表示を示せ。

a) $f(x)=\dfrac{6x^3+14x^2}{4x^2}$，　$\mathrm{Db}(f)=(0, \infty)$

b) $f(x)=\dfrac{5x^2+5}{x^2-1}$，　$x \in (-1, 1)$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$，　$\mathrm{Db}(f)=\mathrm{R}$

d) $f(x)=1+\sin \pi x$，　$x \in \mathrm{G}$

e) $f(x)=2^x$，　$x \in \{0, 1, 2\}$

f) $f(x)=|x|$，　$x<1$

▷2 関数 f の方程式のほかに，その定義域に関して何らはっきりと付加されていないならば，f の定義域はつねにすべての実数の集合であり，かつ，それについて $f(x)$ も同様に実数であ

るべきである。すなわち,

$x_0 \in \mathrm{P}$ かつ $f(x_0) \in \mathrm{P}$ のとき，かつ，そのときに限り，$x_0 \in \mathrm{Db}(f)$

とする。

2 関数 $y=\sqrt{lg(x+3)}$ の定義域をしらべよ。（解略） 答 $-2 \leqq x < \infty$

実変数の実関数は，次のように分類される。

1．有理関数
- 1．1 有理整関数
- 1．2 有理分数関数
  - 1．2．1 真分数関数
  - 1．2．2 真分数ではない分数関数

2．有理関数以外の関数

② 前記の分類を説明せよ。次の関数a）からf）までを分類整理し，かつ，それぞれの定義域を示せ。

a） $y=\dfrac{1}{x}$　b） $y=\cos^2 x$　c） $y=\sqrt{x-4}$　d） $y=\dfrac{x^3+7x-3}{x^2-1}$

e） $y=lg(x+2)$　f） $y=\dfrac{3x^3+3x}{x^2+1}$

2. 関数についての有理演算

3 定義　f および g を，共通の定義域Dをもつ関数とする。関数 s が2つの関数の和 $f+g$ であるとは，s が定義域Dをもち，そのすべての $x \in \mathrm{D}$ に対して，$s(x)=f(x)+g(x)$ が成り立つことである。

同様に，2つの関数 f と g の差 $d=f-g$，積 $p=f \cdot g$，商 $q=\dfrac{f}{g}$ も定義される。

ただし，商をつくるときには，$g(x) \neq 0$ なるような $x \in \mathrm{D}$ のみが q の定義域をつくる。

3 a） $f=\{[2,5], [3,17], [5,0.5], [7,-6], [11,-\frac{1}{2}]\}$

$g=\{[1,3], [3,0.1], [5,20], [7,\frac{1}{3}], [9,3], [11,0]\}$

f と g の共通な定義域は，$\mathrm{D}=\{3,5,7,11\}$ である。

$f+g=\{[3,17.1], [5,20.5], [7,-\frac{17}{3}], [11,-\frac{1}{2}]\}$

$f-g=\{[3,16.9], [5,-19.5], [7,-\frac{19}{3}], [11,-\frac{1}{2}]\}$

$f \cdot g=\{[3,1.7], [5,10], [7,-2], [11,0]\}$

$f : g=\{[3,170], [5,0.025], [7,-18]\}$

b） $f(x)=\sqrt{7-x}$，$g(x)=\sqrt{x-3}$ のとき，関数 f と g の和，積，商をつくる。

関数 f は，定義域 $-\infty < x \leqq 7$ をもち，g は，定義域 $3 \leqq x < \infty$ をもつ。2つに共通な定義域は，区間 $[3,7]$ である。

和 $f+g$ は，$s(x)=\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}$ が成り立つような関数 s である。これは $3 \leqq x \leqq 7$ に対して定義される。

積 $f\cdot g$ は，$p(x)=\sqrt{-x^2+10x-21}$ が成り立つような関数 p である。これは，同様に，$3\leqq x\leqq 7$ に対して定義される。

商 $\dfrac{f}{g}$ は，$q(x)=\sqrt{\dfrac{7-x}{x-3}}$ が成り立つような関数 q である。これは，$3<x\leqq 7$ に対して定義される。$g(3)=0$ であるから，区間の左の端点は除かれる。

③ 関数 $y=x$ および $y=\sin x$ から有理演算をすることによって，新しい関数をつくり，かつ，その定義域をしらべよ。

関数の和や積のグラフを，それぞれの関数のグラフから作図することができる。（図略）

④ 図に表わされている作図法を説明し，かつ，その理由を示せ。

3. 互いに逆の関数

⑤ a）次の関数のうち，1対1の対応であるものはどれかを示せ。

$y=x^2,\quad y=x^3,\quad y=x^2-6x+8,\quad y=\sqrt{x},\quad y=\sqrt{25-x^2}$

$y=\dfrac{1}{x},\quad y=\dfrac{1}{x^2},\quad y=\sin x,\quad y=2^x$

b）単調性と1対1の対応性との間の関係を説明し，かつ，a)にあげた関数で1対1の対応ではないものについて，それが1対1の対応となるような区間を示せ。

4 定義　f を，定義域 M_1 および値域 M_2 なる1対1対応の関数とする。f の逆関数 $\bar{f}$ は，$[x,\ y]\in f$ なるとき，順序対 $[y,\ x]$ の集合である。

$\bar{f}$ は，定義域 M_2 および値域 M_1 をもつ。

1対1の関数 f が，方程式 $y=f(x)$ で表わされ，それが x について解くことができれば，その解が逆関数 $\bar{f}$ の方程式として，$x=\bar{f}(y)$ を与える。

普通には，関数の独立変数を x で，その関数値を y で表わすから，たいていは，方程式 $x=\bar{f}(y)$ において，変数を変えて $y=\bar{f}(x)$ とする。この変更によって，関数そのものは変らない。

4 a）例題C3aの関数 f は，逆関数として，関数

$\bar{f}=\{[5,\ 2],\ [17,\ 3],\ [0.5,\ 5],\ [-6,\ 7],\ [-0.5,\ 11]\}$

をもつ。

b）例題C3bの関数 g においては，$3\leqq x_1<x_2<\infty$ から $\sqrt{x_1-3}<\sqrt{x_2-3}$ が導びかれるから，定義域全体において単調（増加）であり，したがって，1対1であり可逆的である。

逆関数の方程式 $y=\bar{g}(x)$ は次のようにして得られる。

$y=\sqrt{x-3}$ を平方して $y^2=x-3$ または $x=y^2+3$ を得る。変数を交換すれば，$y=\bar{g}(x)=x^2+3$ を得る。

gの値域は，負でない実数の集合のみであるから，定義域Db($\bar{g}$)は，それに応じて，$0 \leqq x < \infty$ によって与えられる。値域Wv($\bar{g}$)は，$3 \leqq y < \infty$ である。

⑥ a）例題C３ａの関数gは可逆的ではない。この理由を説明せよ。

b）例題C３ｂのfに対する逆関数の方程式 $y = \bar{f}(x)$ をつくれ。その定義域と値域を定めよ。fおよび$\bar{f}$を，同一の xy 座標系において，グラフで表わせ。

▷5 互いに逆である２つの関数 $y = f(x)$ と $y = \bar{f}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$に関して対称である。

⑦ 定理C５の意味を，図により $[a,\ b] \in f$のとき，かつ，そのときに限り，$[b,\ a] \in \bar{f}$ であるという関係を考えることによって説明せよ。

関数fが，その定義域の，ある部分集合Ｉにおいてのみ１対１であるならば，定義域を制限して，fのＩの上に生ずる関数f_1の逆関数をつくることができる。

5 関数 $y = f(x) = \sin x$は，区間 $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$において単調（増加）であり，したがって１対１であり可逆的である。図は，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ における関数 $y = f_1(x) = \sin x$ およびその逆関数 $\bar{f}_1(y = \bar{f}_1(x))$ のグラフを等しい座標系において示したものである。（図略）

4．関数の合成

6 $g = \{[0,1],\ [1,2],\ [2,3],\ [3,4],\ [4,5],\ [5,6],\ [6,7],\ [7,8],\ [8,9],\ [9,10]\}$ および，$f = [1,1],\ [4,2],\ [9,3],\ [16,4],\ [25,5]\}$ とする。

gとfの合成（はじめにgを，そのあとでfを）は，次の方法で表わされる。

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & \\
g & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 16 & 25 \\
f & \downarrow & & & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & & & 2 & & & & & 3 & & 4 & 5
\end{array}
$$

gとfの合成によって生ずる関数vは，

$$v = \{[0,1],\ [3,2],\ [8,3]\}$$

である。

例題C６のvに対して，普通，記法 $v = f \circ g$ を用いる。このとき，はじめに適用する関数を右におく。また，例題C６は，gの値域とfの定義域が共通の要素をもつ場合にのみ合成$f \circ g$が起り得ることをも示す。

⑧ 例題C６の関数gとfに対して，関数 $k = g \circ f$ を定め，かつ，$f \circ g$ と比較せよ。

例題C 6の関数gおよびfは，それぞれ制限された定義域をもち，方程式　$y=g(x)=x+1$ および $y=f(x)=\sqrt{x}$ によって表わすことができ，このとき，関数　$v=f\circ g$ には方程式　$y=v(x)=\sqrt{x+1}$ が属する。これを，次のように表わそう。

$z=g(x)=x+1$　および　$y=f(z)=\sqrt{z}$　から

$y=v(x)=f(g(x))=\sqrt{x+1}$　を求める。

記号$f(g(x))$にしたがって，この合成において，gを内関数，fを外関数ということがある。$g(x)$ の定義域 Db(g)は，実数xの集合Pであり，$f(z)$の定義域 Db(f) は，負でない実数zの集合である。この場合，$h(x)=f(g(x))$の定義域 Db(h)は，$-1\leqq x<\infty$なるすべての実数の集合である。

⑨ a）$k(x)=g(f(x))$ に対しても方程式を定めよ。また，$k(x)$ の定義域をしらべよ。
　b）例題C 3 bの関数fおよびgを，合成関数として表わせ。

6 定義　hが，$z=g(x)$ なる関数gと $y=f(z)$ なるfの合成によって得られる関数であるとは，$[x, z]\in g$かつ $[z, y]\in f$ が成り立つzが存在するようなすべての順序対 $[x, y]$ の集合がhであることである。これを，$y=h(x)=f(g(x))$ と書く。

7 三角法の問題を解くときにしばしば有用な三角関数値の対数表は，その三角関数と対数関数（底が10）との合成によって得られる関数の表である。たとえば，$z=g(x)=\sin x$ および $y=f(z)=lg\ z$ から

$$y=h(x)=f[g(x)]=lg\ \sin x$$

が得られる。

定義域Db(h) の決定

外関数fの定義域 Db(f) は，$z>0$なるすべての実数zの集合である。内関数gにより，$z=\sin x$ であり，$\sin x>0$は

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi \qquad (k\in G)$$

なるすべてのxに対して満足される。したがって，このxは，$h(x)=lg\ \sin x$ の定義域をつくる。この $x\in$Db(g) に対する値 $g(x)$ は，同時に定義域 Db(f) に属する。

平面上に，xz座標系およびzy座標系を，両z軸が平行で同じ向きで，かつ，y軸とx軸が同じ直線上にあるようにとるならば，このことをグラフで表わすこともできる。

⑩ a）$y=lg|\sin x|$ のグラフをかけ。
　b）$y=lg|\sin x|$ が，3つの関数の合成によって得られた関数であることをどのようにしてとらえることができるかを説明し，この関数の定義域を示せ。
　c）例題C 7において，$z=\tan x$ と $y=lg\ z$ の合成はどうなるかを研究せよ。

5. べき関数と，根号のついた関数の復習

fを，定義域Dなる関数（$y=f(x)$）とする。

○ fが$\left\{\begin{matrix}\text{上}\\\text{下}\end{matrix}\right\}$に有界であることの定義

▷7 定理　$y=ca^x$（$c \neq 0$, $a>0$ かつ $a \neq 1$）において，変数xが等差数列をなして変るならば，関数値yは等比数列をなして変る。（証明略）

指数関数は，定義域全体において単調であるから，それは可逆的である。$y=a^x$の逆関数を（底がaの）対数関数といい，方程式では，$y=\log_a x$ と書く。$a=10$の場合（常用対数）には，特に $y=\lg x$ と書く。

㉔ a）対数関数の本質的性質を列記せよ。また，$y=\log_2 x$ および $y=\log_3 x$のグラフをかけ。

b）関数　$y=\log_a x^2$, $y=2\ \log_a x$, $y=2\ \log_a|x|$ を比較せよ。

c）指数関数　$y=1.5\cdot 2^x$ および $y=1.5\cdot 2^{-x}$ の逆関数の方程式を求めよ。

9. e なる数

▷8 オイラー数eの定義

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n\in \mathrm{N}, \quad n>0$$

数列 $(a_n)=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$（$n>0$のとき）において，$a_1$, a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{100} などをしらべ，これから（a_n）が単調に増加することが予想される。この予想が確かめられ，かつ（a_n）が上に有界であることを示すことができれば，この極限値の存在が示される。

㉕ どんな定理から，そのとき，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が存在することが導びかれるかを示せ。

極限値の存在の証明

1）$(a_n)=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ が単調に増加することの証明

ベルヌーイの不等式（$n>1$, $n\in \mathrm{N}$, $h>-1$, $h\neq 0$のとき $(1+h)^n>1+nh$）において，$h=-\frac{1}{n^2}$ とおいて，

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{n}{n^2}=1-\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

を得る。したがって，すべての$n>1$に対して，$a_n>a_{n-1}$である。

2）（a_n）が上に有界であることを，（a_n）に対して第2の数列（$\bar{a}_n$）が単調に減少し，かつ，すべての$n\geqq 1$に対してさらに $\bar{a}_n>a_n$が成り立つ数列（$\bar{a}_n$）を与えることによ

に減少する。

(4) これらの関数群はすべて偶関数である。

(5) 零点はない。

(6) 極点 $x_p=0$ 極点漸近線は y 軸である。

(7) すべての $k\in$N, $k>0$ に対して, $\lim_{x\to-\infty} x^{-2k}=\lim_{x\to+\infty} x^{-2k}=0$ である。

漸近線は x 軸である 。漸近線には上から近づく。

(8) これらの関数群は，すべて順序対 $[-1,\ 1]$，および $[1,\ 1]$ を含む。そのグラフは，それぞれ，これに対応する点を通る。

⑪ a) 上に列記された性質の理由を述べよ。

b) 関数群1.1, 1.2, 2.2 に対してそれぞれに共通な性質を列記せよ。また, $y=x^0$ や $y=x^1$ と, 1.1, または1.2とを比較せよ。また，そのグラフをいくつか書いてみよ。

$y=ax^n$ ($a\neq 0$, 実数) の形の関数も，べき関数という。因数 a は，グラフ上では，$y=x^n$ に対して，$a<0$ のときには，x 軸についての折返しをもたらし，さらに，$|a|>1$ のときは y 軸方向への拡大を，$|a|<1$ のときは縮小の意味を生ずる。

整数でない有理数の指数をもつ，べき関数は， $y=x^{\frac{m}{n}}$ の形の方程式をもつ。ここに, $m\in$G, $n\in$N, $n>0$ でかつ n は m を割り切らない。この関数はすべて有理でない関数である。われわれは，ここでは, $m=1$ すなわち $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ ($n\in$N, $n>1$) に限定しよう。

関数 $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ は，定義域として $0\leqq x<\infty$ をもつ関数 $y=x^n$ の逆関数として得られる。

⑫ a) 根号のついた関数 $y=\sqrt[n]{x}$ の性質を列記せよ。

b) 関数 $y=\sqrt[3]{x}$ と $y=x^3$ ($-\infty<x<\infty$) の逆関数とのちがいを説明せよ。（グラフをかいてみよ。）

6. 三角関数の復習

⑬ α を六十分法による角の大きさとする。関係式

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{\mathrm{arc}\ \alpha}{2\pi}$$

を説明せよ。

⑭ 六十分法で与えられた角を弧度法で，また，弧度法で与えられた角を六十分法で示せ。

a) $\alpha=30^\circ$ b) $\alpha=45^\circ$ c) $\alpha=15^\circ 45'$ d) $\alpha=120.5^\circ$

e) $\mathrm{arc}\ \alpha=\frac{\pi}{3}$ f) $\mathrm{arc}\ \alpha=\frac{\pi}{10}$ g) $\mathrm{arc}\ \alpha=3.2$ h) $\mathrm{arc}\ \alpha=0.235$

三角関数は，半径 r の円を用いて定義される。円の中心を原点とする直角 uv 座標系を用い，大きさ x なる角∢(u，k)の辺 k が，円と点P(u，v)で交わるとする。

このとき，正弦関数　$y=\sin x$ とは，順序対 $[x,\ \sin x]$ すべての集合である。ここに x は任意の実数で，$\sin x=\frac{v}{r}$ である。

⑮　$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ に対する定義をそれぞれ示せ。

○関数 f（定義域D）が周期的であることの定義

すべての $x\in$Dに対して，また $x\pm p\in$D であり，かつ，$f(x\pm p)=f(x)$ が成り立つような実数 $p>0$ が存在すること。数 p を，f の周期という。すべての自然数 $k>0$ に対して kp も f の周期であるから，周期関数には無限に多くの周期が存在する。その中で最小なものが存在すれば，それだけを，一般に「f の周期」として表わす。

関数　$y=\sin x$ の性質

(1)　定義域　$-\infty<x<\infty$

(2)　値域　$-1\leqq y\leqq 1$　　したがって，この関数は両側に有界である。

(3)　関数は，最小周期 2π である周期関数である。

(4)　$y=\sin x$ の単調な区間は，すべての $k\in$Gに対して $\left[\frac{(4k-1)\pi}{2},\ \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]$（単調増加），および $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2},\ \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$（単調減少）である。

(5)　$y=\sin x$ は奇関数である。

(6)　$y=\sin x$ は，$k\in$Gとして，零点 $k\pi$ をもつ。

(7)　$y=\sin x$ には極点はない。

⑯　a）上に列記された正弦関数の性質の理由を述べよ。

b）他の三角関数について，対応する性質を列記し，その関数のグラフをかけ。

$\boxed{8}$　$y=1.5\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ について，その最小周期 p を求めよう。（解略）　　答　π

一般に，$a>0$，$b>0$ のとき，$y=a\sin(bx+c)$ の最小周期は $\frac{2\pi}{b}$ である。また，このグラフは，$y=\sin x$ に対する曲線から，縮小，拡大，移動をひきつづき行なって得られる。

7. 三角関数の間の関係

⑰　次の関係式の成立する範囲を説明し，理由を与えよ。

(1)　$\tan x\cot x=1$　　(1a)　$\tan x=\frac{1}{\cot x}$　　(1b)　$\cot x=\frac{1}{\tan x}$

(2)　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$　(2a)　$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$　(2b)　$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$

11. 指数関数の応用

バクテリヤの培養の際，バクテリヤの数$N=N(t)$は，近似的に方程式

$$N=N_0 e^{kt} \qquad (N_0>0,\ k>0)$$

で表わされる。

㉛ a） N_0は，どんな意味をもつかを説明せよ。

b） すでに考察した指数関数に対して，この値域はどんな制限のもとにおかれるか。

c） 繁殖速度とkとの間にはどんな関係があるか。また，時間間隔$\frac{1}{k}$は，どんな意味をもつか。

カール・マルクスによれば，社会的生産の増加は，物質的財産に帰することも指数的な法則である。はじめの近似においては，

(1) $$K=100e^{\varphi t}$$

が成り立つ。ここに，Kは百分率によるいわゆる生産指数であり，tは年単位の時間，φはある定数である。φについて，マルクスが示した数値は，$\varphi=0.0953a^{-1}$である。さらに，レーニンは，マルクスによる原形に，技術の進歩のような因子を考慮に入れて，真実の状態をもっとよく表わすような方程式

(2) $$K=100[1+v(e^{\varphi t}-1)] \qquad (v>0)$$

を，1893年に発表している。

㉜ どのような特別の場合に対して，方程式(2)は方程式(1)になるかを説明せよ。

$N=f(t)$が，時間tに対する放射性物質の原子核の数ならば，

$$N=N_0 e^{-\lambda t}$$

が成り立つ。ここに，N_0は最初にある数であり，λはその物質に対する特有の崩壊定数である。半減期T_Hは，物質のすべての原子核が，その半分に崩壊するまでの時間である。

⑩ ラジウムに対しては，$\lambda=1.382\cdot10^{-11}\cdot s^{-1}$である。このことから，半減期を年単位で計算しよう。（解略） 答 $1.59\cdot10^3$ 年

㉝ 一般に，放射性物質の崩壊定数λと，半減期T_Hとの間の関係を示し，T_Hと，いわゆる平均寿命 $t_m=\frac{1}{\lambda}$ とを比較せよ。

連続する２つの中性子世代の間の平均時間をlで表わすならば，時間tにおいて存在する中性子の数Nに対して，

$$N=N_0 e^{(\nu-1)\frac{t}{l}}$$

を得る。ここに，N_0は，最初のとき（$t=0$）に存在する活動的かつ自由な中性子の数である。一般に，連鎖反応については，$\nu\geqq1$ の場合を論ずる。

7 定理　$y=ca^x$（$c\neq 0$，$a>0$ かつ $a\neq 1$）において，変数 x が等差数列をなして変るならば，関数値 y は等比数列をなして変る。（証明略）

指数関数は，定義域全体において単調であるから，それは可逆的である。$y=a^x$ の逆関数を（底が a の）対数関数といい，方程式では，$y=\log_a x$ と書く。$a=10$ の場合（常用対数）には，特に $y=\lg x$ と書く。

㉔ a）対数関数の本質的性質を列記せよ。また，$y=\log_2 x$ および $y=\log_3 x$ のグラフをかけ。

b）関数　$y=\log_a x^2$，$y=2\log_a x$，$y=2\log_a|x|$ を比較せよ。

c）指数関数　$y=1.5\cdot 2^x$ および $y=1.5\cdot 2^{-x}$ の逆関数の方程式を求めよ。

9. eなる数

8 オイラー数 e の定義

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad n\in\mathrm{N},\quad n>0$$

数列 $(a_n)=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$（$n>0$ のとき）において，a_1，a_2，a_3，a_4，a_{10}，a_{100} などをしらべ，これから (a_n) が単調に増加することが予想される。この予想が確かめられ，かつ (a_n) が上に有界であることを示すことができれば，この極限値の存在が示される。

㉕ どんな定理から，そのとき，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が存在することが導びかれるかを示せ。

極限値の存在の証明

1）$(a_n)=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ が単調に増加することの証明

ベルヌーイの不等式（$n>1$，$n\in\mathrm{N}$，$h>-1$，$h\neq 0$ のとき $(1+h)^n>1+nh$）において，$h=-\frac{1}{n^2}$ とおいて，

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{n}{n^2}=1-\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>1-\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

を得る。したがって，すべての $n>1$ に対して，$a_n>a_{n-1}$ である。

2）(a_n) が上に有界であることを，(a_n) に対して第2の数列 $(\bar{a}_n)$ が単調に減少し，かつ，すべての $n\geqq 1$ に対してさらに $\bar{a}_n>a_n$ が成り立つ数列 $(\bar{a}_n)$ を与えることによ

って示す。

$(\bar{a}_n) = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$ とするとき，$(\bar{a}_n)$ が単調に減少することを示す。

ベルヌーイの不等式において，$h=\frac{1}{n^2}$とおくと，

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}$$

となる。$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n$ であるから，これより，

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}$$

がでて，これに $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ をかけると，

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

が得られる。これは $\bar{a}_{n-1} > \bar{a}_n$ のことであり，これより，$(\bar{a})$ は単調に減少する。

すべての自然数　$n > 0$ に対して，$1+\frac{1}{n} > 1$ であることから，

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \bar{a}_n$$

が導びかれる。これによって，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が存在することが示された。

また，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\bar{a}_n$$

である。

9 定理　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ が成り立つ。また，すべての自然数 $n > 0$ に対して，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

が成り立つ。

㉖ 上で計算した (a_n) および $(\bar{a}_n)$ の項に基づいて，e に対する値を定めてみよ。

実際には，(a_n) も $(\bar{a}_n)$ も極めて遅く収束するので，e の近似値の計算には別の方法を用いる。e は無理数であるが，証明は，見あわさなければならない。

$$e = 2.718281828459\cdots\cdots\cdots$$

任意の実数　$x \neq 0$ に対しても

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

が成り立つことを，証明なしで述べておく。

㉗ 関数　$y=e^x$ および $y=(\frac{1}{e})^x=e^{-x}$ の性質をあげ，この関数のグラフを，$-3\leqq x\leqq 3$ の範囲で示せ。そのために必要な関数値は，数表からとり出せ。

10. 自然対数および底の異なる対数の間の関係

すべての対数の中で，底が e である対数を，自然対数といい，$\log_e x$ のかわりに $\ln x$ と書く。$y=e^x$ の逆関数も，それに応じて，$y=\ln x$ と書かれる。

㉘ a） 関数　$y=\ln x$ の性質をあげ，そのグラフを，$y=e^x$ の曲線（練習Ｃ27）を用いることによって，$0.05\leqq x\leqq 20$ の範囲で示せ。

b） $\ln 2$，$\ln 5$，$\ln 12$，$\ln 13.5$ に対する近似値を，このグラフからよみとり，それと $\ln x$ の数表から得られる値と比較せよ。

㉙ 対数計算のためには，なぜ，常用対数が有利であるか，また，そのためには，自然対数はなぜ，不適当であるかを説明せよ。

10 定理（異なる底の対数の間の関係）

すべての実数 $x>0$，および，$a>0$，$b>0$ かつ $a\neq 1$，$b\neq 1$ なるすべての実数 a，b に対して，

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b},\qquad \log_b x=\log_b a\cdot\log_a x=\frac{1}{\log_a b}\cdot\log_a x$$

が成り立つ。（証明略）

特に，$a=e$，$b=10$ に対しては，

$$\lg x=\lg e\cdot\ln x=\frac{1}{\ln 10}\ln x,\qquad \ln x=\ln 10\cdot\lg x=\frac{1}{\lg e}\lg x$$

であり，換算のためには，次の近似値を利用する。

$$\lg e=\frac{1}{\ln 10}\fallingdotseq 0.43429,\qquad \ln 10=\frac{1}{\lg e}\fallingdotseq 2.30259$$

9 a） $\ln 516=6.2461$ がわかっているときに $\lg 516$ を計算しよう。

b） 常用対数表を用いて，$\ln 0.283$をしらべよう。

（解略）　答　a）$\lg 516=2.7126$　　b）$\ln 0.283=-1.263$

㉚ a） 例題Ｃ９ｂの結果を，自然対数表を用いてしらべよ。

b） 自然対数については，「指標」について述べること，たとえば，$\ln 0.283$を$0.737-2$となおすことが無意味であるのは何故かを説明せよ。

11．指数関数の応用

バクテリヤの培養の際，バクテリヤの数$N=N(t)$は，近似的に方程式

$$N=N_0 e^{kt} \qquad (N_0>0,\ k>0)$$

で表わされる。

㉛ a） N_0は，どんな意味をもつかを説明せよ。

b） すでに考察した指数関数に対して，この値域はどんな制限のもとにおかれるか。

c） 繁殖速度とkとの間にはどんな関係があるか。また，時間間隔 $\frac{1}{k}$ は，どんな意味をもつか。

カール・マルクスによれば，社会的生産の増加は，物質的財産に帰することも指数的な法則である。はじめの近似においては，

(1) $$K=100e^{\varphi t}$$

が成り立つ。ここに，Kは百分率によるいわゆる生産指数であり，tは年単位の時間，φはある定数である。φについて，マルクスが示した数値は，$\varphi=0.0953a^{-1}$である。さらに，レーニンは，マルクスによる原形に，技術の進歩のような因子を考慮に入れて，真実の状態をもっとよく表わすような方程式

(2) $$K=100[1+v(e^{\varphi t}-1)] \qquad (v>0)$$

を，1893年に発表している。

㉜ どのような特別の場合に対して，方程式(2)は方程式(1)になるかを説明せよ。

$N=f(t)$が，時間tに対する放射性物質の原子核の数ならば，

$$N=N_0 e^{-\lambda t}$$

が成り立つ。ここに，N_0は最初にある数であり，λはその物質に対する特有の崩壊定数である。半減期T_Hは，物質のすべての原子核が，その半分に崩壊するまでの時間である。

⑩ ラジウムに対しては，$\lambda=1.382\cdot10^{-11}\cdot s^{-1}$である。このことから，半減期を年単位で計算しよう。（解略） 答 $1.59\cdot10^3$ 年

㉝ 一般に，放射性物質の崩壊定数λと，半減期T_Hとの間の関係を示し，T_Hと，いわゆる平均寿命 $t_m=\frac{1}{\lambda}$ とを比較せよ。

連続する２つの中性子世代の間の平均時間をlで表わすならば，時間tにおいて存在する中性子の数Nに対して，

$$N=N_0 e^{(\nu-1)\frac{t}{l}}$$

を得る。ここに，N_0は，最初のとき（$t=0$）に存在する活動的かつ自由な中性子の数である。一般に，連鎖反応については，$\nu\geqq1$ の場合を論ずる。

根号を含んだ方程式、三角方程式

12. 1回の平方で解ける、根号を含んだ方程式

根号を含んだ方程式

(*) $\qquad T_l = T_r$

において，平方根だけを問題にすれば，方程式(*)の解 x_L は，方程式

(**) $\qquad T_l^2 = T_r^2$

の解である。すなわち，x_Lが(**)の解であることは，x_Lが(*)の解であるために必要である。これが，また，十分条件であるかどうかは，この後の例題によって明らかにされる。

11 方程式 $\sqrt{x} - 5 = 0$ を解け。（解略） 答 $x = 25$

㉞ 次の方程式の解を計算せよ。

a） $\sqrt{x} - 1 = 2$ b） $\sqrt{x} - 2 = -\frac{1}{2}$ c） $\sqrt{x} + 4.2 = 3$ d） $\sqrt{x} - 2 = -4$

12 $\sqrt{x} + b = a$ の形をした方程式は，aとbのどのような条件のもとで解くことができるかを研究しよう。

略解 $\sqrt{x} + b = a$ より $\sqrt{x} = a - b$ 平方して $x = (a - b)^2$

方程式の左辺に対して，xに $(a - b)^2$ を代入すれば，

$$\sqrt{(a - b)^2} + b = |a - b| + b$$

となる。

1．$a - b \geqq 0$ したがって $a \geqq b$ のとき

$|a - b| + b = a - b + b = a$ だから，$(a - b)^2$ は解である。

2．$a - b < 0$ したがって $a < b$ のとき

$|a - b| + b = b - a + b = 2b - a$ だから $(a - b)^2$ は解ではない。

したがって，$\sqrt{x} + b = a$ の形の方程式は，$a \geqq b$のとき，かつ，そのときに限り，ただ1つの実数解 $(a - b)^2$ をもつ。

㉟ a） 方程式

$$\sqrt{2x} - 3 = 3 \qquad および \qquad 2 = \sqrt{-3x} + 0.5$$

の解を計算せよ。

b） 一般に，a，b，cが実数（$c \neq 0$）のとき

$$\sqrt{cx} + b = a$$

が解くことができるかを研究せよ。

a，bが実数のとき，$\sqrt{x + a} = b$ の形の方程式も，1回の平方で取り扱うことができる。このとき，$x \geqq -a$ が成り立つようなxのみが，この問題の解となり得るものであり，また $b \geqq 0$ が，解をもつための必要条件である。

13 方程式 $\sqrt{x-5}-6=0$ を解け。（解略） 答 $x=41$

㊱ a） 方程式 $\sqrt{3x-2}=8$ の解を計算せよ。

b） 実数 a, b, c （$c \neq 0$）について，方程式 $\sqrt{cx+a}=b$ は，どんな条件のもとに解をもつかを研究し，かつ，その解を示せ。

13.

14 a） $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+10}=0$

b） $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+7}=0$

（解略） 答 a） 解集合 $\{1\}$ b） 解集合は空集合（実数解をもたない）

例題C 14 a の解は，等しい座標系において，関数 $y=\sqrt{5x+7}$ と $y=\sqrt{2x+10}$ に対する曲線の交点の横座標でもある。また，C 14 b では，根号は負でない実数であるから，2つの根号の和が零になるのは，ともに零のときである。しかるに，$x+7=0$ および $2x-1=0$ は，等しい x に対しては起り得ない。

㊲ 例題C 14 b の事実を，関数 $y=\sqrt{2x-1}$ と $y=-\sqrt{x+7}$ のグラフをかくことによって図示せよ。

11 平方によって得られた方程式は，もとの方程式と，つねには同値ではない。（証明なく，若干の説明あり）

㊳ 次の方程式を研究せよ。

a） $\sqrt{3x+1}-\sqrt{7x-2}=0$ b） $\sqrt{5x+7}=\sqrt{2x+1}$

c） $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=0$

15 方程式 $x+\sqrt{x}-6=0$ を解け。 （解略） 答 $x=4$

㊴ a） $z=\sqrt{x}$ を代入することによって得られた z についての2次方程式が，等しい解を与えることを示せ。

b） $x+\sqrt{x}-6=0$ および $x-\sqrt{x}-6=0$ について，図（略）に表わされた2つのグラフによって，この方程式の解の状態を図形的に説明せよ。

16 方程式 $\sqrt[3]{x^3+6x+20}-x=2$ を解け。（解略） 答 解集合は $\{1, -2\}$

14. 何回もの平方を必要とする、根号を含んだ方程式

17 $\sqrt{7x-12}+\sqrt{13-3x}-5=0$ （解略） 答 $x=4$, $x=3$

㊵ 方程式 $\sqrt{9x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{25x+14}$ の解集合をしらべよ。

ここでは3つの根号が含まれていることから，3回の平方が必要かどうかを，前もって考察せよ。

18 $\sqrt{x+1+\sqrt{3x+4}}=3$ を解け。

㊶ 方程式 $\sqrt{x+1-\sqrt{3x+4}}=3$ を解け。

15. パラメーターを含む、根号を含んだ方程式

19 方程式（＊）$\sqrt{x+a}=a+\sqrt{x}$ を解け。

略解 （＊）を平方し，根号を分離してさらに平方すると，次の式が得られる。

$$(**)\quad a^2(1-a)^2=4a^2x$$

$a\neq 0$ のときは $x=\dfrac{(1-a)^2}{4}$ となるが，このとき

$$左辺=\frac{1}{2}|1+a| \qquad 右辺=\frac{1}{2}(2a+|1-a|)$$

で，$-1\leqq a\leqq 1$ に対して，$|1+a|=2a+|1-a|$ となる。よって，

$a=0$ のとき，すべての $x\geqq 0$ が（＊）の解である。

$0<|a|\leqq 1$ のとき，解は，$\dfrac{(1-a)^2}{4}$ である。

$|a|>1$ のとき，解は存在しない。

㊷ 例題C19に述べられているように，$|1+a|=2a+|1-a|$ は，確かに $|a|\leqq 1$ のときに成り立つことを証明せよ。

16. ただ1つの三角関数を含む三角方程式

㊸ 次が成り立つような角 x を（弧度法で）求めよ。

a） $\sin x=0.5$　b） $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　c） $\tan x=\sqrt{3}$　d） $\cot x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

20 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。（解略）　答　$k\in G$ として $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$

21 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。（解略）　答　$x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in G)$

㊹ 次の方程式の解を求めよ。

a） $\sin(x+20^\circ)=1$　b） $\cos(x+10^\circ)=0.9373$

c） $\tan(x-20^\circ)=2.747$　d） $\cot(x+\frac{\pi}{4})=0.5774$

e） $2\sin(x+30^\circ)=1$　f） $3\tan(x-22.5^\circ)=0.8391$

17.

[22] $2\sin^2 x - 0.5 = 0$ を解け。（解略） 答 $x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$, $x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$ （$k \in G$）

㊺ a） 図を用いて，例題C 22の解の図表示を説明せよ。
b） 方程式 $3\tan^2 x - 1 = 0$ の解集合を求めよ。

[23] 方程式 $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0$ を解け。（解略）
答 $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$, $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$

㊻ a） 各自，確かめを行なえ。
b） 例題C 22およびC 23における変形について，それぞれ同値な方程式が得られたかどうか，また，ここでは，確かめがどんな意味をもつかを考察せよ。

18. 等しい角の多くの三角関数を含む方程式

[24] $4\cos^2 x - 2\sin x - 2 = 0$ （解略） 答 $x = 30^\circ + k \cdot 120^\circ$ （$k \in G$）

㊼ a） 図表示を説明せよ。
b） 確かめが必要であるかどうかをよく考えよ。$\sin x$ を $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ でおきかえることは，なぜ，不適当であるか。

[25] $\sin x = \cot x$
略解 $\sin x$ をかけて $\cos x$ の2次方程式として，これを解いて，

$$\cos x = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{または} \quad \cos x = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

この第1の方程式から，$x = 51.83^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x = 308.17^\circ + k \cdot 360^\circ$ （$k \in G$）がでる。

㊽ a） 第2の方程式が，解として何の意味もないのは，なぜか。
b） 第2の段階で，$\sin x$ をかけることが，なぜ，x に対して許される範囲を拡大することを意味するかを説明せよ。

19. a sin x ＋b cos x ＝c なる形の方程式

[26] $5\sin x + 2\cos x = 4$
略解 $2\cos x$ を移項し，平方して，$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を代入し，$\cos x$ の二次方程式を解く。 答 $x = 26.2^\circ + k \cdot 360^\circ$, $x = 110.2^\circ + k \cdot 360^\circ$ （$k \in G$）

㊾ a） 図表示を説明せよ。

b） 見かけの解があらわれたのは，解のどの部分にその原因があるか。

27 $5\sin x + 2\cos x = 4$　（例題C26参照）

略解　$\sin x + 0.4\cos x = 0.8$ より $\sin(x + 21.8^\circ) = 0.8 \cdot 0.9285$ と変形して，これを解く。

㊿ $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1 + \tan^2\varphi}$ を用いて，$|c| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$ が，

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

なる形の方程式が解をもつための必要条件である理由を説明せよ。

20. 異なる角を含む三角関数の方程式

28 a） $\sin x + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1.5$

略解　左辺に $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を用いて，$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 0.5 \cdot \sqrt{3}$ として解く。　$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$，$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$　$(k \in G)$

b） $4\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\cos x = \sqrt{3}$

略解　左辺を，加法定理によって展開し，$\sin x = \frac{1}{2}$ を得る。$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$，$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in G)$

51 確かめを行なえ。

29 $\sin x = \cos\frac{x}{2}$

略解　$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ を用いて，$\cos\frac{x}{2} = 0$ または $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ を得る。$x = \pi + 2k\pi$，$x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi$，$x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi$　$(k \in G)$

52 例題C29において，方程式

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}$$

について，その両辺を $\cos\frac{x}{2}$ で割れば，

$$2\sin\frac{x}{2} = 1$$

を得る。

このような処理が，方程式の解に対して，なぜ役に立たないかを説明せよ。

30 $2\sin(\frac{\pi}{4} + x)\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \cos 2x$　（解略）　答　解集合はすべての実数の集合

53 例題C30において，最後の行からはじめの方程式への逆の推論によって，実際に，すべての実数が解であることを確かめよ。

21. 有理ではない関数の零点および無限点

31 関数 $y=\frac{1}{2}\tan x$ の零点，および，無限点を研究しよう。（解略）
答 零点 $x=k\pi$. 無限点 $x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi$

54 関数 $y=(x-1)\cot x$ について，零点および無限点を求めよ。

32 関数 $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$ に対して，零点および無限点を求めよう。（解略）
答 零点 $x=k\pi$. 無限点は存在しない。空白点（定義されない点 —訳者注—）
$x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ （$k\in G$）

55 例題C32の結果を，$\sin 2x$ を2倍角の公式によって変化してその理由を示し，また，考えている関数の定義域を考えて結論を導びけ。

33 $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ なる関数 f の零点および無限点を求めよう。（解略）
答 零点はない。 無限点 $x=1$

有理でない関数の若干の極限値

22. 極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

56 異なる小さい角（弧度法でとることに注意せよ）に対して，$\dfrac{\sin x}{x}$ を考察し，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ について予想を立ててみよ。

12 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ （証明略）

57 この極限値を用いて，また，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ であることを示せ。この2つの極限値から，0° に近い角の正弦および正接の値についての結論をひき出せ。

23. 極限値 $\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

C13 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$　（証明略）

58 関係式C13を特別の場合として，自然対数について考察せよ。したがって，$a=e$とおけ。

D章　微分積分法とその応用

有理でない関数の微分法と積分法

1．復習のために

第11学年において，次の定義はよく知られている。

(a) 関数fが点x_0において微分可能であることの定義

(1) fがx_0の近傍において定義されている。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ が存在する。

(b) 関数fが区間$(a,\ b)$において微分可能であることの定義

fが，$(a,\ b)$のすべての点において微分可能である。

(c) 関数f'，すなわち，すべての順序対$[x,\ f'(x)]$の集合を，fの第1次導関数という。

(d) 関数Fが区間Iにおける関数fの原始関数であることの定義

Iのすべての点に対して，$F'(x)=f(x)$が成り立つ。

関数fが，区間Iにおいて原始関数をもつならば，Iにおけるfの不定積分$\int f(x)dx$とは，Iにおけるfのすべての原始関数の集合である。

FがIにおけるfの任意の原始関数で，Cが任意の実数ならば，Cが実数の集合を動くとき，F＋Cがfの原始関数の集合すべてを動くことの表わし方として，

$\int f(x)dx=F(x)+C$ を用いる。

① 次の関数を微分し，また，それぞれについて，用いられた微分の法則を示せ。

a） $y=x^5$　b） $y=3x^4-2x^2+\frac{1}{2}x+7$　c） $y=(2x^2+3)(x^3-5x+1)$

d） $y=\dfrac{x^3-7}{x^2+5}$　e） $y=x^{-4}\ (x\neq 0)$　f） $y=(x^3-5x^2+7)^3$

② 次の関数を積分し，また，それぞれについて，用いられた積分の法則を示せ。

a） $y=x^4$　b） $y=x^3+3x^2-\frac{5}{2}x+1$

c） $y=x^{-3}\ (x\neq 0)$　d） $y=\dfrac{3x^3+5x^2-7}{x^2}$　$(x\neq 0)$

2．互いに逆である関数の微分法

③ fが単調増加または単調減少の関数ならば，fの逆関数$\bar{f}$も，同じく，単調増加または単調減少であることを証明せよ。

1 定理　fが閉区間［a，b］で連続かつ単調な関数ならば，その逆関数$\bar{f}$は，$f(a)$および，$f(b)$なる数で区切られた閉区間において，同じく，連続かつ単調である。

証明　［a，b］において連続かつ単調増加である関数fについての証明を行なう。$f(a)=\alpha$，かつ，$f(b)=\beta$とする。fは［a，b］において連続であるから，中間値の定理により，区間［α，β］の中の任意のyに対して，$f(x)=y$なるxが［a，b］の中に少くとも1つ存在する。さらに，fは，［a，b］において単調であるから，区間［α，β］の中の任意のyに対して，$f(x)=y$なるxが［a，b］の中に，たかだか1つ存在する。したがって，fに対して逆関数$\bar{f}$が，区間［α，β］の中で定義される。同様に，$\bar{f}$が単調増加関数であることはすでに知られている。（練習D3参照）

次に，$\bar{f}$が［α，β］において連続であること，すなわち，［α，β］の中の任意のy_0に対して，$\lim_{y\to y_0}\bar{f}(y)=\bar{f}(y_0)$が成り立つことを示す。

y_0を区間［α，β］の中の任意の点とし，(y_n)を，

$$\lim_{n\to\infty} y_n=y_0 \quad \text{かつ，すべての } n \text{ に対して} \quad y_n\neq y_0$$

なるような［α，β］の中における任意の数列とする。すなわち，y_0の任意の近傍Uに対して

（＊）　ほとんどすべてのnに対して　$y_n\in U$

が成り立つものとする。数列(y_n)に属する関数値の数列$(\bar{f}(y_n))=(x_n)$が$\bar{f}(y_0)=x_0$に収束することを示さなければならない。そのために，［a，b］に含まれるx_0の任意のε近傍を考察する。$f(x_0-\varepsilon)=\eta_1$かつ$f(x_0+\varepsilon)=\eta_2$とする。$f$の単調性によって，区間$(\eta_1,\eta_2)$は$y_0$の1つの近傍であり，その中に，（＊）によって，数列(y_n)のほとんどすべての項が存在する。$\bar{f}$は単調増加関数であるから，任意の自然数nに対して，

$$\eta_1<y_n<\eta_2 \text{ のとき } \bar{f}(\eta_1)<\bar{f}(y_n)<\bar{f}(\eta_2) \quad \text{または}$$

$$\eta_1<y_n<\eta_2 \text{ のとき } x_0-\varepsilon<x_n<x_0+\varepsilon$$

が成り立つ。この関係式が，ほとんどすべての自然数nに対して成り立つから，

ほとんどすべてのnに対して，$\bar{f}(y_n)=x_n\in U_\varepsilon(x_0)$　である。すなわち

数列$(\bar{f}(y_n))$は$\bar{f}(y_0)=x_0$に収束する

ことが得られる。したがって，$\lim_{y\to y_0}\bar{f}(y)=\bar{f}(y_0)$である。

点y_0は，［α，β］の中で任意にえらばれたものであるから，この考察は［α，β］の中の任意のy_0について成り立つ。これによって，$\bar{f}$は［α，β］において連続であることが示された。

連続な単調減少関数に対する証明も同様に行なわれる。

定理D1は，開区間についても転用することができるから，定理D1は，かんたんに，次のようにいうことができる。

fがある区間で連続かつ単調な関数ならば，fの逆関数$\bar{f}$は，その定義域において，連続かつ単調である。

④ 関数　$y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$（$x\geqq 0$，$n$は$n\geqq 2$なる自然数）が連続である理由をあげよ。

3.

1 関数　$y=g(x)=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ は，任意の正数 x に対して微分可能である。x_0 が任意の正数ならば，$g'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ である。（説明略）

関数　$y=g(x)=\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ あるいは変数を入れかえた　$x=g(y)=\sqrt{y}\ (y\geqq 0)$ は，関数　$y=f(x)=x^2\ (x\geqq 0)$ の逆関数である。f は，点 x_0 において $f'(x_0)=2x_0$ である。関数 g は，点　$y_0=f(x_0)>0$ において微分係数

$$g'(y_0)=\frac{1}{2\sqrt{y_0}}=\frac{1}{2x_0}$$

をもつ。したがって，

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (x_0>0)$$

が成り立つ。

2 定理　f が，点 x_0 の近傍において微分可能である1対1対応の関数で，かつ，$f'(x_0)\neq 0$ ならば，f の逆関数 $\bar{f}$ は，点 $y_0=f(x_0)$ において微分可能であり，かつ，

$$\bar{f}'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

である。

証明　$k\neq 0$ に対して，

$$\frac{\bar{f}(y_0+k)-\bar{f}(y_0)}{k}=\frac{x_0+h-x_0}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

である。f の $1-1$ 対応性により，$k\neq 0$ に対してまた $h\neq 0$ である。

仮定によって，f は，x_0 の近傍において微分可能であるから，完全にこの近傍に含まれる区間 $[x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon]$ が存在し，かつ，その中で f は連続である。しかるに，このとき，（定理D1によって）$\bar{f}$ もまた y_0 の近傍において連続である。すなわち，

$$\lim_{k\to 0}\bar{f}(y_0+k)=\bar{f}(y_0)$$

である。したがって，(k_n) がすべての n に対して $k_n\neq 0$ なる任意の零数列ならば，$(f(x_0+h_n)-f(x_0))$ もまた，それによって，(h_n) もまた零数列である。

仮定によって，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\neq 0$$

が存在する。したがって，極限値

$$\bar{f}'(y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{\bar{f}(y_0+k)-\bar{f}(y_0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

も存在する。すなわち，$\bar{f}$ は，点 y_0 において微分可能であり，かつ，

$$\bar{f}'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

である。

⑤ 等式 $\bar{f}'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ の幾何学的意味を述べよ。

4. 有理数の指数をもつ、べき関数の微分法と積分法

▷3 定理　rが任意の有理数ならば，関数 $y=x^r\ (x>0)$ は，任意の正数xに対して微分可能であり，かつ，$(x^r)'=rx^{r-1}$ が成り立つ。

証明の手順　rが整数の場合を証明し，次に，$r=\frac{1}{n}$（nは自然数で$n\geqq 2$）の場合，その逆関数を用いて証明している。最後に，任意の有理数 $r=\frac{m}{n}$（$m>1$，$n\geqq 2$）について，$y=x^{\frac{m}{n}}=(x^{\frac{1}{n}})^m$ として $y'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$ を導いている。

⑥ rが任意の負の有理数である場合について，証明を導びけ。

2 a) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\quad (x\geqq 0)$ 　　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\quad (x>0)$

b) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}\quad (x\geqq 0)$ 　　$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\quad (x>0)$

c) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}=x^{-\frac{1}{3}}\ (x>0)$ 　　$y'=-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\quad (x>0)$

（いずれも途中計算略）

⑦ 例題D2に与えられた関数について，それぞれ，第2次導関数をつくれ。

$$\int x^r dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+C\quad (r\neq -1,\ x>0)$$ （説明略）

3 a) $\displaystyle\int\sqrt{x}\ dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\quad (x\geqq 0)$ 　　b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C\quad (x>0)$

c) $\displaystyle\int_1^8\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{9}{2}$ 　　（いずれも途中の計算略）

5. 合成関数の微分法

4 $F(x)=(4x^2-5x+7)^3$ なる関数Fは，$z=g(x)=4x^2-5x+7$ および $y=f(z)=z^3$ なる関数gとfの合成によって得られる。このとき，$F'(x)=3(4x^2-5x+7)^2(8x-5)$である。（説明略）

fを点x_0において微分可能な関数とする。ある定点x_0をえらび，これに対して，関数φを

(1) $\varphi(h)=\begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0) & (h\neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (h=0 \text{ のとき}) \end{cases}$

によって定義する。

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}f'(x_0)=0$$

であるから、この関数 φは、点$h=0$において連続である。したがって、$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\varphi(0)$ である。(1)から、

(2) $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+h\varphi(h)$

を得る。この式は、$h=0$に対しても成り立つ。

6.

4 定理　gが点x_0において、かつ、fが点$g(x_0)$において微分可能ならば、gとfの合成によって得られる$F(x)=f[g(x)]$なる関数Fもまた点x_0において微分可能であり、

かつ　$F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$

である。(これを、「合成法則」という。)

証明　仮定によって、fは$g(x_0)=z_0$の近傍U*において定義される。gの点x_0における微分可能性から、gは点x_0において連続であることが導びかれる。しかるに、このとき、x_0の近傍Uが存在し、gはU(x_0)において定義され、かつgが$U(x_0)$においてとるすべての関数値は$U^*(z_0)$の中にある。したがって、$x_0+h\in U(x_0)$なる任意の$h\neq 0$に対して、関数Fについて、

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f[g(x_0+h)-f[g(x_0)]}{h}=\frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{h}$$

が存在する。ただし、$g(x_0)=z_0$,　$g(x_0+h)=z_0+k$　とする。

fは、x_0において微分可能であるから、$z_0+k\in U^*(z_0)$なる任意のkに対して、

$$f(z_0+k)-f(z_0)=k[f'(z_0)+\varphi(k)]$$

が成り立つ。ここに、$\lim_{k\to 0}\varphi(k)=0$　である。したがって、

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{k[f'(z_0)+\varphi(k)]}{h}=\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}[f'(z_0)+\varphi(k)]$$

である。gの点x_0における連続性から、

$$\lim_{h\to 0}[g(x_0+h)-g(x_0)]=\lim_{h\to 0}k=0$$

が導びかれる。しかるにこのとき、また、

$$\lim_{h\to 0}\varphi(k)=0$$

でもある。したがって、

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}[f'(z_0)+\varphi(k)]\right)$$
$$=f'(z_0)g'(x_0)=f'[g(x_0)]g'(x_0)$$

である。

[5] 関数 $F(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}$ は、関数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ および $f(z)=\sqrt{z}$ $(z\geqq 0)$ の合成によって得られる。このとき、 $F'(x)=\dfrac{x}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2+1}}$ である。（説明略）

⑧ 次のことがらを証明せよ。

g が正の関数値のみをとる微分可能な関数ならば

$$(\sqrt{g(x)})'=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

が成り立つ。

$y=f(z)$, $z=g(u)$, $u=h(x)$ なる関数f, g, hの合成によって関数Fに対しては

$$F'(x)=f'(z)\cdot g'(u)\cdot h'(x) \quad \text{または} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

が得られる。（証明なし）

[6] $F(x)=\sqrt{5x^2+7}^{\,3}$ なる関数Fは、導関数 $F'(x)=15x\sqrt{5x^2+7}$ をもつ。（説明略）

7. 置換積分法

[7] 関数fが、$f(x)=(ax+b)^5$ $(a\neq 0)$ によって与えられたとして、原始関数Fを求めよう。

（解略）　答　$F(x)=\dfrac{1}{6a}(ax+b)^6$　　（置換 $ax+b=t$ を用いる）

Iのすべてのxに対して、次の変換公式が成り立つ。

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \quad \text{ここに、} x=\varphi(t) \text{ または } t=\overline{\varphi}(x)$$

証明　区間Ｉにおいて連続な関数fが与えられたとして、これに対し、原始関数Fを求めなければならない。さらに、$x=\varphi(t)$が区間I_1において単調かつ微分可能な関数で、かつ、$\varphi'(t)\neq 0$ とすれば、これによって、区間I_1は可逆的一意的に区間Ｉの上に写像される。したがって、関数 $x=\varphi(t)$ に対しての逆の関数 $t=\overline{\varphi}(x)$がIの中に存在する。この関数$\overline{\varphi}$はIにおいて微分可能であり、かつ

(1)　$$\overline{\varphi}'(x)\cdot\varphi'(t)=1$$

が成り立つ。

いま、関数 $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$ に対して、I_1の中で原始関数Gが存在するならば、すなわち、すべての $t\in\mathrm{I}_1$ に対して

(2)　$$G'(t)=f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

ならば、関数 $F(x)=G[\overline{\varphi}(t)]$ は、区間Ｉにおけるfの原始関数である。

さて、任意の $x\in\mathrm{I}$ に対して、合成法則を用いて、

$$F'(x)=(G[\overline{\varphi}(x)])'=G'[\overline{\varphi}(x)]\,\overline{\varphi}'(x)=G'(t)\,\overline{\varphi}'(x)$$

を得る。これから、(2)を用いて、

$$F'(x)=f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)\ \overline{\varphi}'(x)$$
を得る。このとき、(1)を用いて

(3) $$F'(x)=f[\varphi(t)]=f(x)$$
が導びかれる。

8．例　題

[8] 不定積分 $\int (ax+b)^n dx$　$(a\neq 0, n\neq -1)$ を求めよう。（解略）

答 $\dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

⑨ a）例題D 8の結果が正しいことを、微分することによって確認せよ。

b）例題D 8と同様にして、不定積分 $\int\sqrt{3x-5}\,dx$ を求めよ。

[9] 積分 $\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$　を求めよ。

略解　$x>0$ に対して $\sqrt{x^2+1}=t$ と置換して求め、$x\leqq 0$ に対してもその結果が成り立つことを確かめる。　　答 $\sqrt{x^2+1}+C$

積分 $\int_a^b f(x)dx$（fは、$[a, b]$ において連続）をかんたんにするには、区間 $[\alpha, \beta]$ において連続な導関数をもち、かつ区間 $[\alpha, \beta]$ が可逆的一意的に区間 $[a, b]$ の上に写像されるような関数 $x=\varphi(t)$ が必要である。このとき、$\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ $(\alpha=\overline{\varphi}((a), \beta=\overline{\varphi}(b))$
ならば、

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)\,dt$$
が成り立つ。（証明なし）

[10] 定積分 $\int_{-1}^{3}\sqrt{2x+3}\,dx$　を計算しよう。（解略）　答 $\dfrac{26}{3}$

9．三角関数の微分法および積分法

⑤ 定理　関数sin, cos, tan, cotは、その定義域の任意の点xにおいて微分可能である。そして、

(1) $(\sin x)'=\cos x$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$

(3) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　$\left(x\neq(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2},\ k\text{は整数}\right)$

(4) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$　$(x\neq k\pi,\ k\text{は整数})$

である。（証明略）

関数 tan および cot の導関数は、

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \qquad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) \qquad (x \neq k\pi)$$

の形で示されることも多い。

任意の区間に対して、

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

が成り立つ。被積分関数の分母が零点をもたないような任意の区間に対して、

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

が成り立つ。

10. 例　題

$\boxed{11}$ a) $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$　　$(\sin x^2)' = 2x\cos x^2$

$(\sin^2 x)' = 2\sin x\cos x$　　$[\cos(ax+b)]' = -a\sin(ax+b)$

$(\sin x\cos x)' = \cos 2x$　　（いずれも途中の計算略）

b) 関数 $f(x) = 2\cos^3 x + 2\sin^2 x - 5\tan x$　$(\cos x \neq 0)$ は、導関数

$$f'(x) = -6\cos^2 x\sin x + 4\sin x\cos x - \frac{5}{\cos^2 x}$$ をもつ。

c) 正弦曲線の、座標の原点における接線は、どんな傾きをもつか。（解略）　答　1

$\boxed{12}$ a) $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = 2$

b) $\int \cos ax\, dx$ $(a \neq 0)$ を置換の方法で求めると、$\frac{1}{a}\sin ax + C$

c) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

d) $\int \mathrm{ccs}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$

e) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$　　（いずれも途中の計算略）

⑩ 例題D12 b, c, d, e の結果の正しいことを、微分法によって確認せよ。

11. 対数関数の微分法および積分法

▷6 定理　任意の対数関数 $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$ は、その定義域の任意の点において微分可能であり、かつ、

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

が成り立つ。（証明略）

特別な対数関数 $f(x) = \ln x = \log_e x$　$(x > 0)$ に対しては、$\log_e e = 1$ であるから、

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

が得られる。

13 a) 関数　$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ （$x>0$）の導関数は、$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ （$x>0$）である。

b) 関数　$f(x)=\ln\sin x$ （$\sin x>0$）の導関数は、$f'(x)=\cot x$ （$\sin x>0$）である。

(a), b) とも途中の計算略)

c) 関数　$f(x)=\ln x$ のグラフは、x軸とどんな角で交わるか。（解略）　　答　$\dfrac{\pi}{4}$

この微分法則から、直接に、次の公式が得られる。

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \qquad (x>0)$$

$$\int\frac{dx}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}\ln x+C=\log_a x+C \qquad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$$

また、$x<0$ に対しては、$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C$ が成り立つ。したがって、零を含まない任意の区間において、$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$ が成り立つ。

14 定積分 $\int_1^2\frac{dx}{x}$ を計算しよう。　（解略）　　答　$\ln 2$

関数　$f(x)=\ln x$ は、任意の正数xに対して、次のように定義することができる。

$$\ln x=\int_1^x\frac{dt}{t} \qquad (x>0)$$

12. 指数関数の微分法および積分法

D7 定理　　任意の指数関数　$y=a^x$ （$a>0$）は、任意の点xに対して微分可能であり、かつ、

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (a>0)$$

である。（証明略）

特別な指数関数　$y=e^x$ に対しては、

$$(e^x)'=e^x$$

が得られる。（ここで、e が特別の数であり、理論的な研究の際に特別扱いされることについて述べられている。）

定理D７から、直ちに、次のことが導びかれる。
任意の区間に対して、

$$\int a^x dx = \frac{1}{lna} a^x + C \qquad (a>0,\ a \neq 1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

が成り立つ。

15 a) $(a^{-\lambda x})' = -\lambda\, lna \cdot a^{-\lambda t}$ 　　($a>0$, λは任意の実数)

b) $(e^{\sin x})' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

c) gが微分可能な関数ならば、$(e^{g(x)})' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$である。

d) rが任意の実数であるとき、$(x^r)' = rx^{r-1}$であり（説明略)、有理数の指数をもつ、べき関数の微分法についての公式は、実数指数をもつ、べき関数についても成り立つ。

e) 積分$\int xe^{x^2}dx$ を置換の方法を用いて計算する。　(解略)　答 $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

16 放射性物質の崩壊は、多くの目的に足りる近似で、いわゆる崩壊法則

(1) $N = N_0 e^{-\lambda t}$ 　　$(t \geqq 0)$

によって書き表わすことができる。（C章)

放射性物質の、時刻tにおける崩壊速度は、関数(1)の導関数 $v(t) = \frac{dN}{dt}$ である。

$$v(t) = N_0\, e^{-\lambda t}(-\lambda) = -\lambda N_0\, e^{-\lambda t} = -\lambda N$$

である。したがって、崩壊速度$\frac{dN}{dt}$ は、まだ崩壊していない原子核の数Nに比例する。それゆえ、崩壊法則は、また、$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ たる形で示すこともできる。

⑪ 時点T（半減期、C章参照）における崩壊速度は、時点$t=0$のときのそれの半分だけにすぎないことを確かめよ。

曲線の研究，極値の問題

13. 復習のために

関数fの変化と、f'およびf''（これらの導関数が存在すると仮定して）の符号との関係

1．点x_0において微分可能な関数fは、$f'(x_0)>0$ または $f'(x_0)<0$のとき、x_0において単調増加または単調減少である。

2．点x_0において2回微分可能な関数fは、$f''(x_0)>0$ または $f''(x_0)<0$のとき、x_0において凸あるいは凹である。

微分可能な関数に対する極値の存在と極大極小、変曲点の存在

1．fが点x_0において微分可能ならば、条件$f'(x_0)=0$は、点x_0においてfが極値をとるために必要である。（しかし十分でない。)

したがって、x_0において微分可能な関数fは、$f'(x_0) \neq 0$ ならば、点x_0において極値をもたない。

2．f が、x_0 の近傍において微分可能ならば、条件 $f'(x_0)=0$ かつ f' が x_0 において符号を変える　は、点 x_0 において f が極値をとるために十分である。(しかし必要ではない。)
この十分条件が満足されるならば、f は x_0 において、

f' が x の増加に伴って、正から負の値に移行するときには、極大

f' が x の増加に伴って、負から正の値に移行するときには、極小

である。

3．f が、点 x_0 において2回微分可能ならば、条件 $f'(x_0)=0$ かつ $f''(x_0)\neq 0$ もまた点 x_0 において f が極値をとるために十分である。(しかし必要ではない。) また、確かに f は x_0 において、

$f''(x_0)<0$　のときは、極大

$f''(x_0)>0$　のときは、極小

である。

4．点 x_0 において2回または3回微分可能な関数 f が、x_0 において変曲点をもつための必要条件（しかし十分ではない）は、$f''(x_0)=0$

十分条件（しかし必要ではない）は、

a）$f''(x_0)=0$　かつ　f'' が x_0 において符号を変える

b）$f''(x_0)=0$　かつ　$f'''(x_0)\neq 0$

である。

17 関数 $f(x)=\ln x$　$(x>0)$ の単調性および凹凸について研究しよう。　(解略)

答　関数 $f(x)=\ln x$ は、その定義域の任意の x に対して単調に増加し、かつ、凹である。

18 関数 $f(x)=x^2 e^x$ の極値を計算しよう。　(解略)

答　極小値　$f(0)=0$，極大値　$f(-2)\fallingdotseq 0.54$

14.

19 関数 $f(x)=(x-3)\sqrt[3]{x^2}$ の零点、極値、変曲点を求め、かつ、区間 $-1.5\leqq x\leqq 5$ においてこの関数のグラフを示そう。　(解略)

答　零点 $x=0,\ 3$　極大値 $f(0)=0$　極小値 $f\left(\frac{6}{5}\right)\fallingdotseq -2.03$　変曲点 $(-0.6,\ -2.6)$

グラフ略

15.

20 関数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$　の零点、極大極小、変曲点を計算し、かつ区間 $-\pi\leqq x\leqq 2\pi$　において、関数のグラフを示そう。　(解略)

答　零点 $x=k\pi$　極大 $x=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$　$f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$　極小 $x=\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi$

$f(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$　変曲点 $x=k\pi,\ f(x)=0$；$x\fallingdotseq 1.82+k\cdot 2\pi$　$f(x)\fallingdotseq 1.45$；

$x \fallingdotseq 4.46 + k \cdot 2\pi$,　$f(x) \fallingdotseq -1.45$,　グラフ略

16. 関数値の近似計算

微分法の平均値の定理を用いて、関数値の近似的数値計算ができる。

関数 f が、$[a, b]$ において連続で、かつ、(a, b) において微分可能ならば、

(1)
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

が成り立つような、$a < \xi < b$ なる数 ξ が存在する。$a = x_0$, $b = x_0 + h$ とおけば、方程式(1)は、

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi)$$

または

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(\xi)$$

と書き表わされる。$x_0 < \xi < x_0 + h$ であるから、$\xi = x_0 + \theta h$ が成り立つような、$0 < \theta < 1$ なる数 θ が存在する。これによって、

(2)
$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

を得る。

f が与えられた関数で、その導関数 f' が一定の区間 $[x_0, x_0+h]$ で単調であり、かつ、関数値 $f(x_0)$ が知られたならば、(2)を用いて、関数値 $f(x_0+h)$ に対して、その下界および上界を計算することができる。

f' が $[x_0, x_0+h]$ において単調に増加するならば、

$$f(x_0) + hf'(x_0) < f(x_0+h) < f(x_0) + hf'(x_0+h)$$

が成り立ち、f' が $[x_0, x_0+h]$ において単調に減少するならば、

$$f(x_0) + hf'(x_0+h) < f(x_0+h) < f(x_0) + hf'(x_0)$$

が成り立つ。

21 $ln15 \fallingdotseq 2.7081$（数表）を用いて、$ln15.2$に対する下界と上界を計算しよう。

略解　　$2.70805 < ln15 < 2.70815$

$f(x) = ln\,x$ $(x > 0)$ に対して

$$ln(x_0+h) = ln\,x_0 + \frac{h}{x_0+\theta h} \qquad 0 < \theta < 1$$

である。$f(x) = ln\,x$ $(x > 0)$ の導関数は単調に減少するから、$x_0 = 15$ および $h = 0.2$ とおくことにより、$ln15.2$に対して、$\theta = 1$ のとき下界、$\theta = 0$ のとき上界が得られる。

$$\theta = 1 \qquad \frac{h}{x_0+\theta h} = \frac{0.2}{15.2} = 0.013158\cdots\cdots > 0.01315$$

$$\theta = 0 \qquad \frac{h}{x_0+\theta h} = \frac{0.2}{15} = 0.013333\cdots\cdots < 0.01334$$

したがって、

$$2.70805 + 0.01315 < ln15.2 < 2.70815 + 0.01334$$

または、

$$2.7212 < ln 15.2 < 2.7215$$

が成り立ち、$ln 15.2 \fallingdotseq 2.7213$ とおけば、この近似値の誤差は、高高 0.0002 に等しい。

22 $e \fallingdotseq 2.7183$（数表）を円いて、$e^{1.01}$ に対する下界および上界を計算しよう。（解略）

答の一例　$2.7454 < e^{1.01} < 2.7459$

23 関数 $f(x) = x + e^{2x}$ の零点の存在について研究しよう。場合によっては、その零点について、近似値を計算しよう。

略解　$f'(x) = 1 + 2e^{2x} > 0$ より $f(x)$ は単調増加である。また、$f(x)$ は連続関数で、$f(-1) < 0$，$f(0) > 0$ であるから、区間 $(-1, 0)$ においてただ1つの零点 x^* をもつ。e^{-2x} と $-x$ のグラフをかくことにより、数 $x_0 = -0.4$ が求める零点 x^* の近似値の1つであることがわかる。$f(x_0) = -0.4 + e^{-0.8} \fallingdotseq 0.05$ である。

微分法の平均値の定理によって、$f(x^*) = f(x_0) + (x^* - x_0)f'(\xi)$ が成り立つような数 ξ が、x^* と x_0 の間に存在する。$f(x^*) = 0$ だから、

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(\xi)}$$

となる。数 ξ のかわりに数 x_0 をとれば、数

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

が得られ、これは x^* の近似値としては、数 x_0 より適している。

$$x_1 = -0.4 - \frac{f(-0.4)}{f'(-0.4)} \fallingdotseq -0.426$$

$$f(-0.426) = -0.426 + e^{-0.852} < 0.001$$

これより、$x_1 = -0.426$ は零点 x^* の近似値としては x_0 よりも適している。

この近似値の精密さを評価するために、差 $f(x_1) - f(x^*)$ に平均値の定理を適用して、

$$f(x_1) - f(x^*) = (x_1 - x^*)f'(\xi), \qquad x^* \lesseqgtr \xi \lesseqgtr x_1$$

を得る。これから、

$$x_1 - x^* = \frac{f(x_1)}{f'(\xi)}$$

が導びかれる。k を、$|f'(x)|$ の、区間 $[-1,\ 0]$ における最小値とすれば、

$$|x_1 - x^*| \leqq \frac{|f(x_1)|}{k}$$

が成り立つ。$f'(-1) = 1 + 2e^{-2} > 1.27$ より、

$$|x_1 - x^*| \leqq \frac{|f(x_1)|}{1.27} < 0.0009$$

となる。

このことから、零点 x^* の近似値として -0.426 をとれば、その誤差は $9 \cdot 10^{-4}$ より小さい。

この方法をくりかえせば、さらに、もっと適切な近似値を計算することができる。

17. 極値の問題

24 国防人民軍の砲列が、点Aから点Bまで陣地を移動しなければならない。点Aは道路上にあり、点Bはほぼ直線上の道路から12kmだけ離れたゲレンデ上にある。Bから道路への垂線の足はAから20km離れている。行軍の速度は、道路上では $v_1 = 50\mathrm{km}\cdot h^{-1}$ で、ゲレンデ上では $v_2 = 25\mathrm{km}\cdot h^{-1}$ である。陣地の移動をできるだけ短時間で成しとげるためには、道路上のどの点で、隊列のコースを変えたらよいか。（解略）答、点Aから約13.1kmの地点。

18

25 ある帆船の進行方向は、風の方向と角 φ ($0 \leqq \varphi < \pi$)をなしている。風の力を最大限に利用するためには、帆をどのように張らなければならないか。（解略）

答、帆と進行方向のなす角を $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2}$ とするように帆を張ればよい。すなわち、帆が、進行方向と風の方向との間の角の２等分線に垂直に立てられたときである。

19

26 曲線 $y = e^x$ 上のどの点が、座標の原点から最短距離にあるか。（解略）

答、x 座標が $x \fallingdotseq -0.426$ なる点。（例題D23参照）

面積および体積の計算

20. 面積の計算（復習）

fが区間 [a, b] において連続な関数で、その関数値が [a, b] において負でないならばfのグラフ、x軸、および、直線 $x = a$, $x = b$ で区切られた平面の面分の面積Aを、関数fの区間 [a, b] における定積分で表わす。すなわち、$A = \int_a^b f(x)\,dx$ である。

fの関数値が区間 [a, b] において正でないならば、その面分の面積は、

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$$

である。

区間 [a, b] において連続な任意の関数 f に対して、定積分$\int_a^b f(x)\,dx$ は存在する。区間 [a, b] に対して、ある特別分割列をえらび、その第 n 番目の分割が、

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots\cdots < x_n^{(n)} = b$$

なる数 $x_0^{(n)}$, $x_1^{(n)}$, ……, $x_n^{(n)}$ によって与えられ、また、定まった数 ξ_i を、

$$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)}$$

なるようにえらべば、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

が成り立つ。

f が区間 $[a, b]$ において連続な関数であり、かつ F が f の原始関数ならば、

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$　である。

21. 例　題

27 区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ において、正弦曲線と x 軸によって境界とされている面分の面積を計算しよう。　(解略)　　答　4

28 ある航空機の翼面の断面図は、関数 $f_1(x)=\frac{x^2}{8}$ および $f_2(x)=\frac{1}{4}\sqrt{2x}$ のグラフで境界とされている。この断面図の面積を計算しよう。　(解略)　　答 $\frac{1}{3}$

29 任意の正数 a および b に対して、つねに、$\int_1^a \frac{dx}{x}=\int_b^{ab}\frac{dx}{x}$ であることを示せ。その結果を幾何学的に意味を述べよ。　(解略)

⑫ 例題D29の結果を応用して、任意の正数 a および b に対して、つねに、

$$\int_1^a \frac{dx}{x}+\int_1^b \frac{dx}{x}=\int_1^{ab}\frac{dx}{x}$$

が成り立つことを示せ。

この等式によって、対数の重要などのような性質が表わされているか。

30 関数 $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x+4}$　$(x\neq -4)$ は、$x>-4$ において、2つの零点 x_1 および x_2 をもつ。区間 $[x_1, x_2]$ において、関数のグラフおよび x 軸で囲まれた面分の面積を計算しよう。　(解略)　答　約20.2

22. 円の面積

半径 r なる四分円　$y=\sqrt{r^2-x^2}$，$0\leqq x\leqq r$　と座標軸によって囲まれた面分の面積は

$$A_1=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

である。関数　$x=\varphi(t)=r\sin t$　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ によって置換積分し、$A_1=\frac{1}{4}\pi r^2$ を得るから、円の面積は

$$A=\pi r^2$$

である。

⑬ 楕円　$x^2+4y^2=25$　と放物線　$y^2=\frac{15}{8}x$ によって囲まれた2つの面分の、小さい方の面積を計算せよ。

23. 体積の計算

31 空間座標系において直四角錐を考える。座標系は、座標の原点が角錐の頂点と一致するように、また、x軸が底面に垂直になるようにえらばれている。

底面に平行な平面による角錐の切断によって、底面と相似な断面を生ずる。角錐の底面A_Gの面積をAとし、角錐の高さをhとすれば、点x（$0 \leqq x \leqq h$）における断面の面積Qに対して、$Q = \frac{A}{h^2}x^2$ を得る。これから体積Vは、

$$V = \int_0^h Q(x)dx = \int_0^h \frac{A}{h^2}x^2\,dx = \frac{A}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{Ah}{3}$$

となる。

区間$[0, h]$において、ある特別分割列(z_n)を、その第n番目の分割z_nを、

$$0 = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots\cdots < x_n^{(n)} = h$$

なる数$x_0^{(n)}$, $x_1^{(n)}$, ………, $x_n^{(n)}$によって与えられ、かつ、定まった数$\xi_i^{(n)}$を

$$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)}$$

なるようにえらぶならば、

$$\int_0^h \frac{A}{h^2}x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{h^2}(\xi_i^{(n)})^2(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \tag{1}$$

が成り立つ。

⑭ ある定まったn（$n > 0$）に対して(1)における加数

$$\frac{A}{h^2}(\xi_i^{(n)})^2(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n)$$

および、その和

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{A}{h^2}(\xi_i^{(n)})^2(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

の幾何学的意味を述べよ。

24.

立体Kが、3次元のカルテシアン座標系において与えられたとする。aおよびbを、Kの点の横座標の下限および上限とする。したがって、点集合Kは、平行な2平面 $x = a$ および $x = b$ の間にある。平面 $x = x_0$（$a \leqq x_0 \leqq b$）上にある立体Kの点集合を、点x_0におけるKの断面という。$[a, b]$の任意のxに対して、Kの断面の面積$A(x)$が既知であり、かつ、$a \leqq x \leqq b$なる順序対$[x, A(x)]$より成る集合Aが、連続な関数であると仮定する。

一定の与えられた自然数n（$n > 0$）に対して、区間$[a, b]$を、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

なる任意にえらばれた分点x_0, x_1, x_2, ……, x_{n-1}, x_nによって、n個の部分区間に分割する。平面$x = x_i$（$i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$）によって、立体Kは$n$個の層に分割される。

それぞれの部分区間$[x_{i-1}, x_i]$（$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$）において、$x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ なる任意

の中間点 ξ_i をえらぶ。平面 $x=x_{i-1}$ と $x=x_i$ ($i=1,2,\cdots\cdots,n$) の間にある立体Kの層を底面がKの点 ξ_i ($x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$) における切断に等しく、また、高さが区間の長さ $x_i - x_{i-1}$ に等しいような柱 K_i によっておきかえる。

柱 K_i の底面の面積は、仮定によって $A(\xi_i)$ であるから、その体積は $A(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ である。n 個の柱 K_i より構成される立体 $\overline{K}$ の体積は、

$$sn = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

である。立体 $\overline{K}$ が、十分大きいに対して、点集合Kと近似的に同じになることは明らかである。

いま、区間 $[a, b]$ に対して、任意の特別分割列 (z_n) を考察し、この分割列の各分割 z_n に対して、部分区間 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ ($i=1,2,\cdots\cdots,n$) の中に、$x_{i-1}^{(n)} \leqq \xi_i^{(n)} \leqq x_i^{(n)}$ なる任意の数 $\xi_i^{(n)}$ をえらぶ。数 $\xi_i^{(n)}$ をえらんだ後で、(z_n) の分割 z_n のそれぞれに対して、和

$$sn = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

をつくるならば、分割列 (z_n) は一意的に数列 (sn) に対応づけられる。関数Aは仮定によって連続であるから、数列 (sn) は定積分 $\int_a^b A(x)\,dx$ に収束する。すなわち、

$$\lim_{n\to\infty} sn = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) = \int_a^b A(x)\,dx$$

であり、これを立体Kの体積と考える。

8 定義　2平面 $x=a$ および $x=b$ の間にあり、かつ、点 x ($a \leqq x \leqq b$) における断面の図形が面積 $A(x)$ をもつような立体の体積は、定積分

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

である。ここに、$a \leqq x \leqq b$ についての順序対 $[x, A(x)]$ の集合は連続関数である。

32 半径 r なる球の体積を計算しよう。(解略)　答 $\frac{4}{3}\pi r^3$

⑮ 積分の計算を用いて、すでに知っている次の体積の公式を確かめよ。

a) 直角柱に対して　$V = Ah$

b) 任意の円錐に対して　$V = \frac{Ah}{3}$

c) 直円柱に対して　$V = \pi r^2 h$

9 ガバリエリの定理　2平面 $x=a$ および $x=b$ の間にある2つの立体は、$a \leqq x \leqq b$ なる任意の x に対してその断面の面積が一致するときには、同じ体積をもつ。

25. 回転体の体積

f を、$[a, b]$ において連続な関数でその関数値が $[a, b]$ において負でないとする。関数 f のグラフを x 軸のまわりに回転してできる回転体の、点 x ($a \leqq x \leqq b$) における断面の面積は、$A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi y^2$ である。したがって、回転体の体積は、

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx$$

である。

f が、$[a, b]$ において連続かつ単調な関数で、かつ、$f(a) = c$ および $f(b) = d$ が成

り立つならば、f の逆関数$\overline{f}$が区間 $[c, d]$ または $[d, c]$ において存在する。 この関数は定理D 1により、やはり連続である。f のグラフを y 軸のまわりに回転すれば、2平面 $y=c$ および $y=d$ の間にある回転体が得られる。$c<d$ ならば、この回転体は体積

$$V=\pi\int_c^d [f(y)]^2\, dy=\pi\int_c^d x^2 dy$$

をもつ。

33 底面の半径 r, 高さ h なる円錐の体積を計算しよう。 (解略) 答 $\frac{\pi}{3}r^2h$

⑯ 同様にして、円錐台に対する体積の公式を導びけ。

34 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を y 軸のまわりに回転することによって、楕円面がつくられる。楕円面によって区切られた回転体の体積は、$V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$ である。 (説明略)

26. その他の例題

35 球欠の体積を計算しよう。(解略) 答 r を球の半径、h を球欠の高さとし、$h<r$ とすると、$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$

36 頂点から出る放物線の弧の回転によって得られる表面をもつある立体が、比重 ν_{FL} の液体の中に浮かんでいる。h を立体の高さとし、d をその最大断面の直径とする。立体をつくっている物質の比重が ν_K ($\nu_K<\nu_{FL}$) であるとき、この立体は、どの深さまで液体の中に沈むか。ただし、立体の軸は、液体の面に垂直でであるとする。 (解略)

答 $h\sqrt{\frac{\nu_K}{\nu_{FL}}}$

37 楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ を x 軸のまわりに回転する。こうして得られた回転楕円面によって区切られた立体から、平面 $x=2$ によって一部を切りとり、その切断面に1つの直円錐をつぎたし、こうして得られた流線形の物体の表面が全く折れ曲りのないようにする。流線形のこの物 体の体積を計算しよう。(解略)

答 $\frac{98}{3}\pi$

巻末の、章別、学習単位別の問題数の一覧

練習問題数

各章において、左側は学習単位、右側はそれに対する問題数を示す。また、問題が与えられていない学習単位は省略してある。

a 章		b 章		c 章		d 章	
A 1	4	B 1	7	C 1	3	D 1	11
2	5	2	2	2	3	3	3
3	4	3	3	3	3	4	2
4	4	5	3	4	4	6	7
6	4	6	3	5	3	8	3
7	4	7	1	6	3	10	10
8	4	8	5	7	5	11	8
9	4	9	3	8	5	12	9
10	3	10	4	9	1	15	11
11	2	11	4	10	6	19	30
12	7	12	6	11	6	22	11
13	5	13	3	13	6	26	19
14	6	14	2	14	3		
15	4	15	3	15	1		
16	4	16	4	17	3		
17	4	17	6	18	2		
18	7	18	5	19	2		
19	3	19	5	20	8		
21	3	20	1	21	2		
22	5	21	4	22	3		
23	3	22	5	23	1		
24	8						
25	3						
26	1						
27	3						
28	4						
計	108	計	79	計	73	計	124
						総数	384

補充問題数

a 章	14	b 章	11	c 章	17	d 章	26
						総数	68

以上、あわせて、452 題の問題が収録されている。

補 充 問 題 の 例

a 1．零ベクトルではない3つのベクトル $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ が、2つずつ互いに平行である。すなわち、$\mathfrak{a}=\lambda_1\mathfrak{b}$，$\mathfrak{b}=\lambda_2\mathfrak{c}$，$\mathfrak{c}=\lambda_3\mathfrak{a}$ が成り立つ。ベクトル $\mathfrak{b}$ と $\mathfrak{c}$ の一次結合としての $\mathfrak{a}$ の表示を、少くとも3つの異なる形で与えよ。

a 4．任意のベクトル $\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{b}$ に対して、つねに、

a) $-|\mathfrak{a}||\mathfrak{b}| \leqq \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} \leqq |\mathfrak{a}||\mathfrak{b}|$　　　b) $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2 \leqq |\mathfrak{a}|^2|\mathfrak{b}|^2$

であることを示せ。どのような条件のもとに、この関係式の等号が成り立つか。

a 8．三角形の中線は1点で交わることを、ベクトルを用いて証明せよ。

a 11．M$(-1.5,\ 0.75)$ を中心とする円が、直線 $16x+12y=85$ に接している。この円の方程式をつくり、かつ、接点の座標を計算せよ。

a 14　関係式

a) $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2 \leqq \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$　　　b) $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})^2+(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})^2=\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$

の成立を証明せよ。a）において、どのような条件のもとに、等号が成り立つか。

b 4．一定の長さの線分の端点が、異なる座標軸上にある。端点が軸上を動くとき、この線分上の任意の定点は、どんな曲線をえがくか。

b 8．楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ において座標軸と等しい正の切片をもつような接線の方程式をつくれ。

b 9．2つの楕円が、方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ および $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ によって与えられている。

2つの楕円に共通な接線の方程式をつくり、これらの接線の交点によってできるひし形の面積を計算せよ。

b 11　双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の焦点と漸近線との距離、および、漸近線のなす角の大きさを計算せよ。

c 3．a) $f=\overline{f}$　　　b) $f=-\overline{f}$　　　c) $f=\overline{f}+C$ $(C\in P$ かつ $C\neq 0)$

が、それぞれ成り立つような、一次関数 f をすべて求めよ。

c 4．次の関数の合成によってつくられる関数に対して、その定義域と値域を求めよ。

a) $y=lg z$,　$z=\sin u$,　$u=\frac{x^2}{2}$

b) $y=z^2$,　$z=\cos u$,　$u=\sqrt{v}$,　$v=x^2+2$

c 6．$\alpha+\beta+\gamma=\pi$　なるすべての α, β, γ に対して、

a）$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=1$

b）$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=2$

が成り立つことを証明せよ。

c 8．$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$ であることを示せ。

ヒント：ベルヌーイの不等式によって、

$1-\frac{1}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n<1$　であることから導びけ。

c 9．次の方程式を解け。

a）$2^x-3^{x+1}=2^{x+2}-3^{x+3}$　　　b）$2^{(3^x)}=3^{(4^x)}$

c）$15^x+9^x=25^x$

c 13．次の方程式を解け。

a）$a\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=\frac{3}{4}a^2$　　　b）$\sqrt{x-a}-\sqrt[3]{x-a}=0$

c 14．不等式　$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\geqq\frac{8}{3}$　が成り立つようなすべての実数 x を求めよ。

d 1．すべての自然数 n（$n>0$）に対して、次の関数の第 n 次導関数を、それぞれ求めよ。

a）$f(x)=ax^5-3x^4+x-3$　　　b）$f(x)=ax^7-12x^3+17$

c）$f(x)=(ax+b)^m$　　（m：自然数）

d 4．a）関数　$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$　の定義域をしらべよ。

b）f の逆関数　$x=g(y)$ を求めよ。

g の定義域は何か。

c）f と g の第1次導関数を計算せよ。

d）導関数は、原始関数と同じ定義域をもっているか。

d 7．示されている置換によって、次の積分を計算せよ。

a）$\int x\sqrt{x-1}\,dx$，　$t=\sqrt{x-1}$　　　b）$\int\frac{x}{\sqrt{2x^2+2}}dx$，　$t=\sqrt{2x^2+2}$

c）$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$，　$t=\sqrt{x+1}$　　　d）$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$，　$t=\frac{1}{x}$

d 8．次の関数の第 n 次導関数に対する法則性を公式で表わせ。

a）$f(x)=\sin x$　　　b）$f(x)=\cos x$

d 9 .任意の x に対して $f(x+a)=f(x)$ なる実数 $a>0$ が存在するとき関数 f は周期的であるという。

周期関数の導関数は、周期関数になることを証明せよ。

d 10. 偶関数の導関数は奇関数であり、また、奇関数の導関数は偶関数であることを証明せよ。

d 13. 次の恒等式を証明せよ。

$$f'(x)=f(x)[lnf(x)]' \qquad (ただし、f(x)>0)$$

ヒント：$lnf(x)$ の x についての導関数を、合成法則を用いてつくってみよ。

d 14. 次の関数の第1次導関数を、それぞれ、求めよ。（補充問題d 13の公式を利用せよ。）

a) $f(x)=x^x$　　b) $f(x)=x^{lnx}$　　c) $f(x)=x^{\sin x}$

d) $f(x)=(lnx)^x$　　e) $f(x)=(\sin x)^x$　　f) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

d 15. 関数 $f(x)=e^x$ のグラフ、直線 $x=2$, x 軸、および、y 軸に平行な1直線によって 囲まれた図形の面積は12である。

この平行線を求めよ。

d 18. 次の不等式を証明せよ。

a) $x>0$ に対して、 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$

b) $x\neq 0$ に対して、 $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$

c) $x>0$ に対して、 $x-\dfrac{x^2}{2}<ln(1+x)<x$

d 23 関数 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ のグラフ、および、点P (1, 0) を通り y 軸に平行な直線によって囲まれた図形の面積を計算せよ。

d 26. 与えられた直円柱の底面と高さを共有する、回転放物面体の体積は、円柱の体積の半分に等しいことを証明せよ。

第12学年教科書　　終